Перейдём в полярную систему координат.
Будем решать задачу 2 в круге.

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

Представим u как

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

И делим переменные. Напомним вид лапласиана в полярной СК:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Тогда

$$\Phi(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}R(r) + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0$$

Первое и третье слагаемое объединим в одно, вынеся за скобки Φ(φ):

$$\Phi(\varphi)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \lambda R(r)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}R(r) = 0$$

Поделим на R(r) * Φ(φ), домножим на r^2. Тогда получим

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2 R(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

Оба слагаемых константы.

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \text{const}$$

У нас два уравнения. Среди них есть одно простое:

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \text{const}$$

Моментально выписываем его решение. Это косинус или синус… или шинус или чосинус? Давайте сообразим. У нас же есть условие Φ(0)=Φ(2π) (иначе у нас будут проблемы с сшивкой). Ни чосинус, ни шинус не смахивают на периодические функции, а вот синус и косинус вполне.

(Замечание для читавших ММФ1. Условие Φ(0)=Φ(2π) является однородным и для него справедлива теорема про оператор Буткарёва: он должен быть отрицательным, в чём мы лишний раз убедились).

Итак, $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)$.
А Φ(φ) – это произвольная линейная комбинация $\Phi_n(\varphi)$.

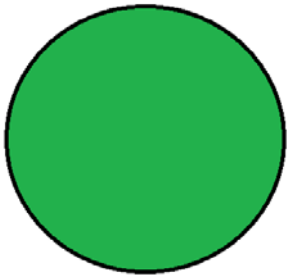
Натуральное число n показывает, сколько периодов укладывается от 0 до 2π. Т.е. из дифура мы поняли, что будет синус и косинус, а из граничного условия

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$$

Что от 0 до 2π должно укладываться n периодов.
Для каждой $\Phi_n(\varphi)$ узнаем, какая в этом случае будет константа. Это

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{(\cos n\varphi)''}{\cos n\varphi} = n^2$$

Если мы вместо $\cos(n\varphi)$ возьмём $\sin(n\varphi)$, ничего не изменится.
Итак, мы
1) Нашли угловую функцию $\Phi(\varphi)$
2) Поняли, что констатна может принимать не любые значения, а только $const_n=n^2$. Я её обозначу ν^2. Стоп, зачем нам обозначать n новой буквой ν?
Ответ: чтобы мы потом легко обобщили наши результаты не только для

круга  , но и для его сектора .
Ещё лучше обозначение с индексом ν_n .

Теперь давайте вернёмся к уравнению на радиальную часть:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\lambda r^2 R(r)}{R(r)} = \nu^2$$

Его можно немного переписать:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

Решение этого уравнения попросту не выражается через элементарные функции – синус, косинус, экспоненту и логарифм. Ну как не выражается через элементарные функции интегралы от $\sin x / x$, $\cos x / x$, $\exp(-x^2)$. Или бета и гамма функции в третьем семестре.

Сделаем пока что одну замену:

Выполним подстановку: $x = \sqrt{\lambda} r \Rightarrow r = \dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}$, $\lambda \neq 0$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{dR}{dx}\sqrt{\lambda}$$

Подставим:

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\sqrt{\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cancel{\sqrt{\lambda}}}\cancel{\sqrt{\lambda}}\frac{dR(x)}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\lambda\right)R(x) = 0$$

Очевидно, что λ полностью уходит

Получаем уравнение Бесселя (дивергентная форма):

$$\boxed{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR(x)}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0} \tag{2.2}$$

Если обозначить $y = R$ и домножить на x^2, то получим вариант уравнения Бесселя в недивергентной форме:

$$\boxed{x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0} \tag{2.3}$$

Так как же нам найти решение? А оно не выражается через элементарные функции!

Т.к. ФСР любого дифура второго порядка – две функции, то фундаментальное решение и данного дифура – это линейная комбинации новых для вас функций Бесселя и Неймана с параметром ν.

$$y(x)=C1*J_\nu(x)+C2*N_\nu(x)$$

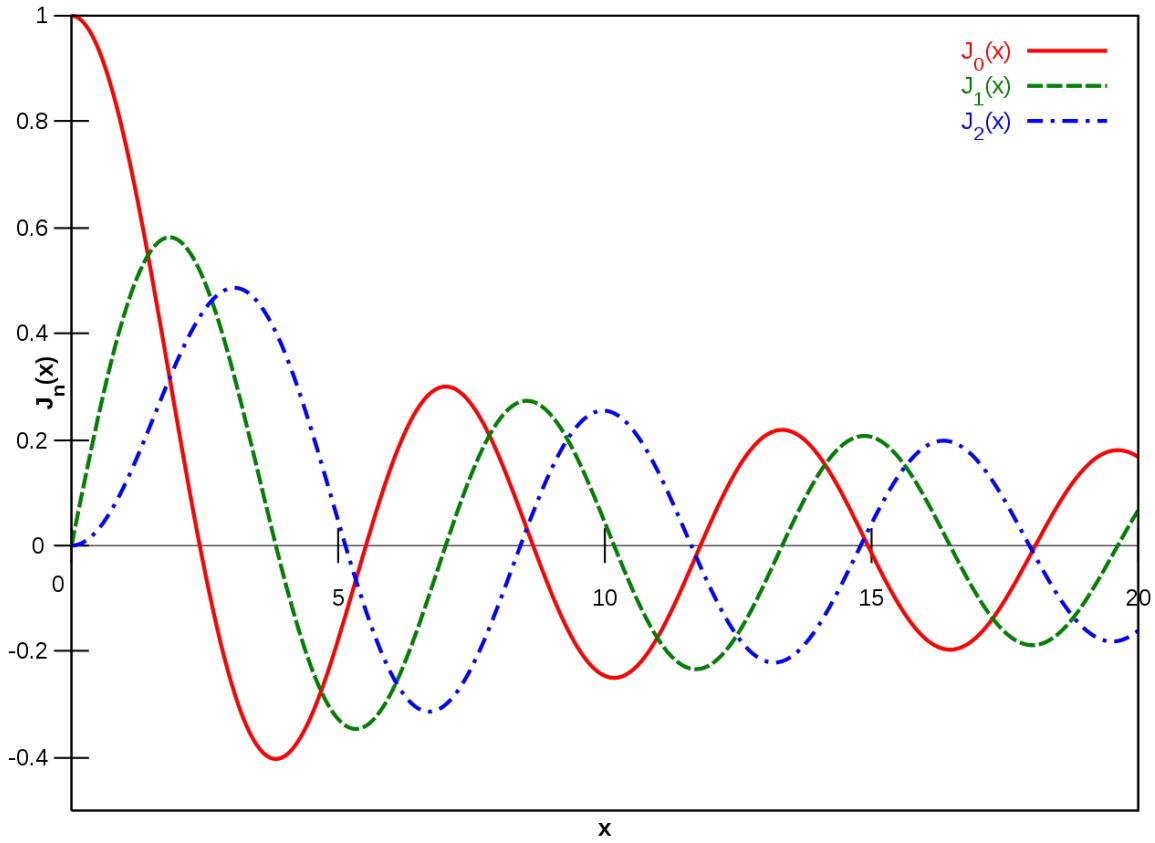
J – функция Бесселя, N – функция Неймана.

Эти функции не представляются в виде элементарных функций (синуса, экспонента, логарифма и т.д.) Они новые для нас, и как сказал Боголюбов, скоро они станут такими же родными для нас, как и синус с косинусом в 10-м классе.

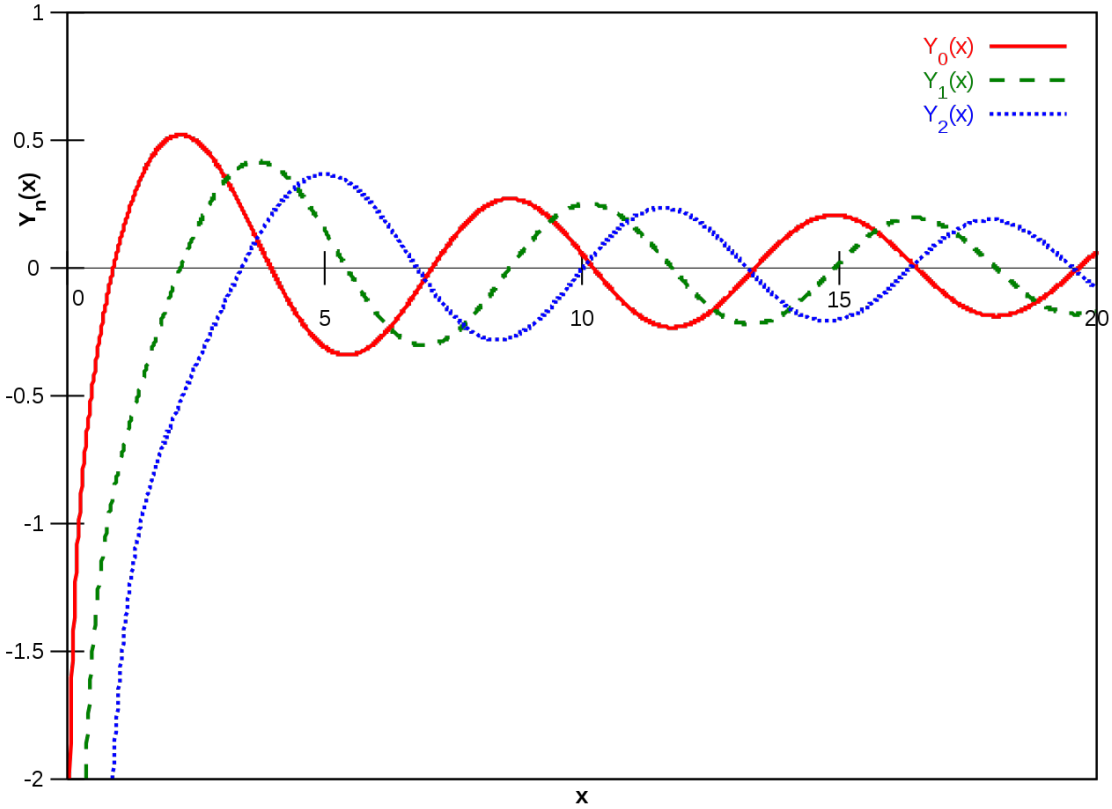
Раз эти функции не представляются в виде элементарных, нам всё равно охота понять, что это вообще такое.

Вот так выглядят их графики:

Функции Бесселя



Функции Бесселя 2-го рода



(в Википедии функции Неймана обозначаются буквой Y, а не N, да ещё называются функциями Бесселя второго рода, но как говорил Пауль Ландерс из «Rammstein» - «Фикипедия» не источник).
Похожи на функции Бесселя, не правда ли? Точно так же квазипериодические, затухают с ростом x, только при x->0 стремятся к бесконечности.

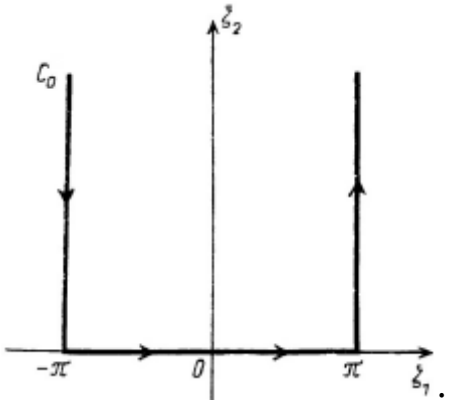
Если вы фанат матана-3 с рядами, то я вас порадую: функции Бесселя можно выразить через степенной ряд:

$$J_\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\sigma)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\sigma+2k}$$

Если вы фанат ТФКП, то я вас порадую: функции Бесселя можно выразить через интеграл по комплексной плоскости:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi} d\xi$$

, где C0 – это вот такой вот контур:



Для функций Неймана таких разложений нет, зато они выражаются через функции Бесселя:

$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

где в случае целого α берётся предел по α, вычисляемый, например, с помощью правила Лопиталя.

На лекциях всё это доказывается, я просто воиспровожу конечные результаты.

А пока вам нужно запомнить, что эти функции являются решением соответствующего дифура. Т.е.:

Если у вас уравнение $f'(x) - \nu f(x) = 0$, вы должны за 1 секунду выписать его решение f(x)=C1*exp(νx).

Если у вас уравнение $f''(x)+\nu^2 f(x)=0$, вы должны за 1 секунду выписать его решение f(x)=C1*sin(νx)+C2*cos(νx).

А если у вас уравнение $x^2 f''(x)+x f'(x)+(x^2-\nu^2) f(x)=0$

Или, равносильное ему $f''(x)+\frac{1}{x} f(x)+\left(1-\left(\frac{\nu}{x}\right)^2\right) f(x)=0$, то, начиная с сегодняшнего дня, вы обязаны за 1 секунду выписать его решение

$f(x)=C*J_\nu(x)+D*N_\nu(x)$.

Запомнили? Отлично!

Вернёмся к задаче 2 про круг. Мы там делали замену

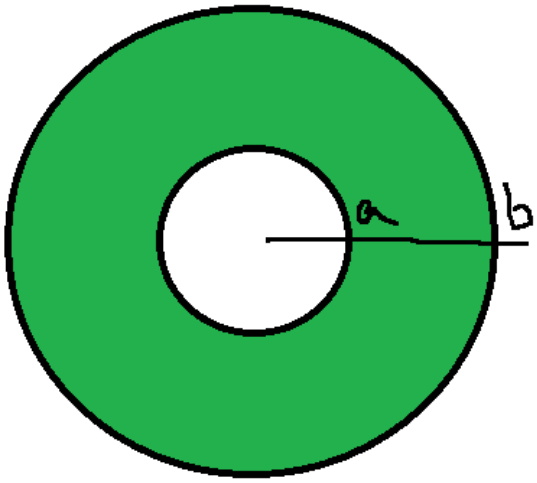
$$x=\sqrt{\lambda}r \Rightarrow r=\frac{x}{\sqrt{\lambda}},$$

(распереживающимся «а что, если лямбда будет отрицательной» сообщаю, что тогда нетривиальных решений не будет вовсе. Отсылаю вас к ММФ1).
Получаем, что R(r) тогда будет (обозначим σ=sqrt(λ))

$R(r)=C*J_\nu(\sigma r)+D*N_\nu(\sigma r)$.

Обведите себе в рамочку и повесьте над кроватью, теперь вы это тоже в течение ближайших недель научитесь выписывать за одну секунду.
Коэффициенты C и D определяются из граничных условий.

Пример 1. У нас кольцо:



На обеих границах (которые в форме дуг) условия 1 рода.
Тогда должны выполняться условия
R(a)=R(b)=0.
Подставляем:

$$\begin{cases} C_n J_{\nu_n}(\sigma a) + D_n N_{\nu_n}(\sigma a) = 0 \\ C_n J_{\nu_n}(\sigma b) + D_n N_{\nu_n}(\sigma b) = 0 \end{cases}$$

Чтобы эта однородная система имела нетривиальное решение, требуется равенство нулю определителя.

$$J_{\nu_n}(\sigma a) N_{\nu_n}(\sigma b) - J_{\nu_n}(\sigma b) N_{\nu_n}(\sigma a) = 0$$

Мы получили уравнение относительно σ. Оно имеет k корней для каждого n. А σ, я напомню, тесно связано с λ – это квадратный корень из λ.
Таким, СЗ – это λ_{nk}, а СФ – это

$$\Phi_n(\varphi) R_{nk}(z)$$

Где

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

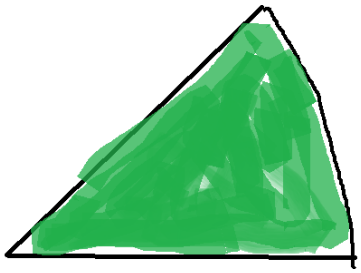
$$R_{nk}(z) = C_n J_{\nu_n}(\sigma_k z) + D_n N_{\nu_n}(\sigma_k z)$$

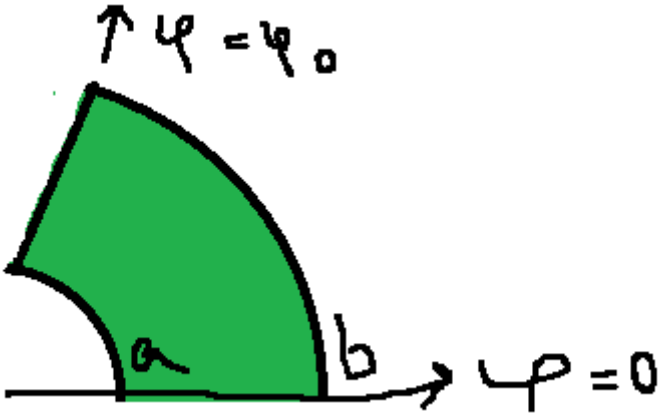
Точный вид СЗ определить нельзя из-за того, что уравнение нерешаемо.

Пример 2. Решим ту же задачу, но уже для круга (a=0).
У нас пропадает граничное условие R(a)=0. Что же делать? У нас пропадает одно из уравнений системы. На самом деле нет: функция Неймана при r->0 уходит на бесконечность, поэтому зануляются все Dшки. Остаются только Сшки. И из

$$\left(\ \ \right]_{\nu_n}(\sigma b)=0$$

Мы вновь можем определить k возможных значений σ для каждого n.

Пример 3. Сегмент круга:  или сектор кольца



Немного усложнится ситуация для Φ(φ). У нас φ будет меняться не от 0 до 2π, а от 0 до α.
Если и там, и там условия первого рода:
$u(r,0)=0 \Leftrightarrow \Phi(0)=0$
$u(r,\alpha)=0 \Leftrightarrow \Phi(\alpha)=0$
И вместо
$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi)$.
Будет
$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi*\pi/\alpha)+B_n\sin(n\varphi*\pi/\alpha)$.
А ν_n тогда будет
$n^2*(\pi/\alpha)^2$.
Теперь понятно, зачем потребовалось вводить букву ν_n ! Мы можем, не меняя наших результатов для радиальной функции, написать тот же ответ:
R(r) имеет вид $C*J_\nu(\sigma r)+D*N_\nu(\sigma r)$.
Φ(φ) имеет вид $A_n*\cos(\nu\varphi)+B_n*\sin(\nu\varphi)$.
И этот результат легко кастомизируется под конкретный вид области.
φ меняется от 0 до 2π?
Значит, $\nu_n=n$,

R(r) имеет вид $C*J_\nu(\sigma r)+D*N_\nu(\sigma r)$.
Φ(φ) имеет вид $A_n*\cos(\nu\varphi)+B_n*\sin(\nu\varphi)$.
r меняется от 0 до чего-то?
Выкидываем функцию Неймана, у неё проблемы в нуле.

Теперь перейдём в 3 измерения. Пусть у нас цилиндр, z меняется от 0 до L. Сильно много у нас там не меняется.
Разделим u на Z(z)*v(r,φ):.

$$Z(z)\Delta_{r\varphi}v(r,\varphi)+v(r,\varphi)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}+\lambda Z(z)v(r,\varphi)=0$$

И поделим на Z(z):

$$\Delta_{r\varphi}v(r,\varphi)+v(r,\varphi)\frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)}+\lambda v(r,\varphi)=0$$

Всё не зависит от z, кроме одного слагаемого. Получаем, что оператор Буткарёва от Z(z) равен константе. Это баянная задача. Например, если у нас на обоих основания цилиндра граничные условия Дирихле, то
Z(0)=Z(L)=0
Тогда СФ $Z_m(z)=\sin(\pi mz/L)$, $\mu_m=(\pi m/L)^2$.
Теперь если мы введём ξ=λ-μ, то если мы далее распишем v(r,φ) на R(r) * Φ(φ), то получим

$$\Phi(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}R(r)+\xi R(r)\Phi(\varphi)=0$$

Уже знакомую нам задачу, только вместо лямбды кси – загляните в самое начало методички, такое уравнение у нас уже было. Пишем готовый ответ:
R(r) имеет вид $C_n*J_\nu(\sigma r)+D_n*N_\nu(\sigma r)$.
Φ(φ) имеет вид $A_n*\cos(\nu\varphi)+B_n*\sin(\nu\varphi)$.
И к нему приписываем наш результат для Z(z). Разница от 2D для R(r) будет лишь в том, что σ раньше было sqrt(λ), а теперь будет sqrt(ξ=λ-μ).